això no vol dir que no hi hagi gent que cobri més (i menys) del que hem apuntat, sinó que hem intentat presentar uns rangs salarials on es trobin una majoria dels matemàtics que treballen a l'empresa privada.

Referències

[1] «Resolució del MECD» del 19/11/2015, BOE del 27/11.

[2] «Taules retributives del personal docent i investigador. Any 2016». UPC.

[3] «Pressupostos Generals de l'Estat 2016». BOE del 29/10/2015, art. 39.

[4] Departament d'Ensenyament. «Taules de retribució».

[5] «Privada concertada. Retribucions del personal docent. Any 2016». CCOO Educació: `http://concertada.ccoo.cat`.

Després de més de 50 anys, s'ha provat la conjectura GCI: una història ben particular

Josep Lluís Solé i Clivillés
Departament de Matemàtiques de la UAB

En un article del *Quantamagazine* [10] del passat mes de març hi apareix la notícia que Thomas Royen, un matemàtic jubilat, havia provat la conjectura GCI (*gaussian correlation inequality*), formulada originalment els anys cinquanta, [1] i [2], dins del context d'intervals de confiança simultanis. Aquesta prova s'havia resistit des d'aleshores, i molts matemàtics hi pensaren durant llargs períodes, i se'n van publicar molts resultats parcials. Trobareu una breu història de la conjectura a les pàgines inicials de [8].

Thomas Royen

Thomas Royen havia treballat en estadística a la indústria farmacèutica, i des del 1985 fou professor a Bingen, una petita universitat alemanya. Explica que la idea per a la prova li vingué, un matí de juliol del 2014, rentant-se les dents, i a la tarda ja tenia escrita la primera versió de l'article. Com que no coneixia el TeX, utilitzà Word i l'envià a diversos matemàtics, entre ells el professor Donald Richards, de la Universitat de Pennsilvània, el qual durant trenta anys havia intentat trobar una demostració de la conjectura. Richards de seguida veié que la prova era correcta, i ajudà Royen a escriure-ho en LaTeX. A l'agost la preimpressió es va penjar a Arxiv.

L'acollida de la preimpressió per part d'altres matemàtics no fou tan entusiasta com Royen esperava. S'ha de tenir en compte que en els darrers anys a Arxiv s'hi penjaren diverses proves falses, i que era habitual que, amb certa freqüència, algú manifestés que havia assolit la demostració, i s'hi trobés sempre algun error.

Finalment, l'article [7] es publicà en una revista índia poc coneguda, i això fou la causa que la prova passés desapercebuda, fins que Latala i un estudiant seu, Matlak, l'escriviren d'una manera més senzilla i clara, i ho publicaren [4] els primers mesos del 2017.

Klartag es pregunta com, en una època de tanta facilitat de comunicació, sigui possible que, més d'un any després, la comunitat matemàtica no conegués l'èxit que representa haver trobat una prova del GCI, i aquest fet és el que es destaca a l'article del *Quantamagazine* [10].

Wolchover [10] insinua que potser va ser perquè Royen no era gaire conegut, però, si mirem els seus treballs a Mathscinet, no té un currículum negligible encara que la major

part dels seus articles estan relacionats amb un tema molt específic, el de la distribució gamma multivariant, introduïda el 1951 per Parthasarathy *et al.* [6], en un article molt bonic. Precisament fer servir algunes propietats d'aquesta distribució multivariant, que havia estudiat tan a fons és el que li donà la clau de la prova, ben diferent de la de molts dels intents anteriors, que havien emprat eines i arguments molt més sofisticats. A vegades la clàssica afirmació de la navalla d'Ockham és ben encertada!

Ara comentaré què diu la conjectura GCI. Veureu que és tan clara que si fóssim matemàtics joves i atrevits, en conèixer-la afirmaríem, amb un entusiasme certament agosarat: «Espera, que aquesta nit m'hi poso, i demà et diré alguna cosa».

Conjectura GCI: Siguin A i B dos subconjunts de $\mathbb{R}^n$ convexos i simètrics respecte a l'origen ($A = -A$), i sigui μ_n una llei normal multivariant a $\mathbb{R}^n$, de vector d'esperança $\overrightarrow{0}$ i matriu de covariàncies Σ. Aleshores:

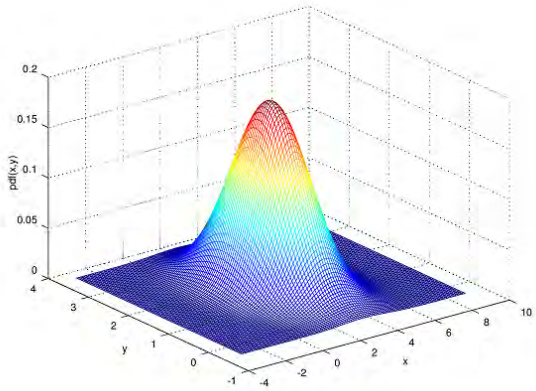
$$\mu_n(A \cap B) \geq \mu_n(A)\mu_n(B).$$

A continuació presentaré dos casos particulars d'aplicació de la conjectura. Imagineu que llanceu dards a una diana, i que la posició on es claven està modelada per un vector $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2)$ amb una llei normal multivariant dos dimensional centrada a l'origen, que és el centre de la diana. Agafem com a subconjunts A i B un cercle i un rectangle centrats a l'origen. Aleshores la desigualtat ens diu que la probabilitat que el dard es clavi a la intersecció del cercle i del rectangle és igual o superior al producte de les probabilitats que es clavi en el cercle i que es clavi en el rectangle, és a dir:

$$P(\overrightarrow{X} \in \text{cercle} \cap \text{rectangle}) \geq P(\overrightarrow{X} \in \text{cercle})P(\overrightarrow{X} \in \text{rectangle}).$$

Per a l'altre cas, considerem el vector aleatori $\overrightarrow{X} = (H, W)$ que modela l'altura i el pes d'una persona, i suposem que té una llei normal 2 dimensional. Anomenem (H_c, W_c) el vector centrat. Aleshores, agafant com a conjunts $A = [a, -a] \times \mathbb{R}$ i $B = \mathbb{R} \times [-b, b]$, és a dir, dues bandes convexes i simètriques, la conjectura ens diu que:

$$\begin{aligned} P((H_c, P_c) \in A \cap B) &= P(H_c \in [a, -a], W_c \in [-b, b]) \\ &\geq P((H_c, P_c) \in A)P((H_c, P_c) \in B) \\ &= P(H_c \in [-a, a])P(W_c \in [-b, b]). \end{aligned}$$



La idea de la prova és clara. Tot conjunt convex i simètric el podem escriure com una intersecció numerable de bandes simètriques, i per tant n'hi ha prou de provar la conjectura quan, fixats n_1 i n_2, amb $n_1 + n_2 = n$, uns números positius $t_1, \ldots, t_n$, i també n vectors $\overrightarrow{v}_1, \ldots, \overrightarrow{v}_n$, els conjunts A i B són de la forma:

$$A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : |< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}_i >| \leq t_i, i = 1, \ldots, n_1\},$$

$$B = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : |< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}_i >| \leq t_i, i = n_1 + 1, \ldots, n\}.$$

Com una transformació lineal d'una variable gaussiana multivariant és també gaussiana, definint

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Y} &= (Y_1, \ldots, Y_n) \\ &= (< \overrightarrow{X}, \overrightarrow{v}_1 >, \ldots, < \overrightarrow{X}, \overrightarrow{v}_n >), \end{aligned}$$

podem escriure la conjectura de la manera següent:

Conjectura GCI: Fixats n_1 i n_2 tals que $n_1+n_2=n$, uns números no negatius $t_1,\dots,t_n$, i un vector gaussià centrat $\overrightarrow{Y}$, aleshores:

$$\begin{aligned}&P(|Y_1|\le t_1,\dots,|Y_n|\le t_n)\\&\quad\ge P(|Y_1|\le t_1,\dots,|Y_{n_1}|\le t_{n_1})\\&\qquad\times P(|Y_{n_1+1}|\le t_{n_1+1},\dots,|Y_n|\le t_n).\end{aligned}$$

Quan $n_1=1$, la conjectura fou provada independentment per Khatri [3] i Sidak [9] el 1967. D'altra banda, el cas $n=2$ el va demostrar Pitt [5] el 1977 utilitzant que la integral del producte de gradients de funcions suaus quasi-còncaves, que no s'anul·len quan $x\neq 0$, multiplicat per una funció no negativa tal que tan sols depèn del mòdul $\|\overrightarrow{x}\|$ i decreixent amb $\|\overrightarrow{x}\|$ (en particular la densitat gaussiana estàndard), no és mai negativa, desigualtat que tan sols es pot provar si les funcions estan definides en $\mathbb{R}^2$.

Fixem-nos que la desigualtat de la conjectura GCI és equivalent a la següent:

$$\begin{aligned}&P(Y_1^2\le t_1^2,\dots,Y_n^2\le t_n^2)\\&\quad\ge P(Y_1^2\le t_1^2,\dots,Y_{n_1}^2\le t_{n_1}^2)\\&\qquad\times P(Y_{n_1+1}^2\le t_{n_1+1}^2,\dots,Y_n\le t_n^2).\end{aligned}$$

En particular Royen provà aquesta desigualtat per a un vector $(Y_1^2,\dots,Y_n^2)$ amb una llei n-gamma $\Gamma(\alpha,R)$, amb α tal que $2\alpha\in\mathbb{N}$, i R una matriu de correlacions no singular [6]. Aquesta llei, com hem dit abans, era ben coneguda per Royen. El cas concret de la conjectura correspon a $\alpha=\frac{1}{2}$. La transformada de Laplace de la distribució $\Gamma(\alpha,R)$ és

$$|I_n+RT|^{-\alpha},$$

amb I_n la matriu identitat, i T la matriu $\operatorname{diag}(t_1,\dots,t_n)$.

La demostració de Royen es basa en el fet que si tenim la matriu de correlacions R de la llei gaussiana i l'escrivim en submatrius

$$R=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}$$

de manera que la dimensió de R_{11} és $n_1\times n_1$, la de R_{12}, $n_1\times n_2$, i la de R_{22} és $n_2\times n_2$, totes de rang màxim, llavors, per $0\le t\le 1$, la matriu

$$R_t:=\begin{pmatrix}R_{11}&tR_{12}\\tR_{21}&R_{22}\end{pmatrix}$$

és també una matriu de correlacions.

Royen considera el vector aleatori $(Y_1(t)^2,\dots,Y_n(t)^2)$, $0\le t\le 1$, amb una llei $\Gamma(\alpha,R_t)$. Aleshores, el terme de l'esquerra de la conjectura GCI correspon al cas $t=1$, ja que $R=R_1$, i per tant coincideix amb la funció de distribució d'una llei $\Gamma(\alpha,R_1)$, que anomena $F(s_1,\dots,s_n,\alpha,R)$. D'altra banda, el terme de la dreta, on hi ha la factorització, correspon a $t=0$, i és la funció de distribució de la llei $\Gamma(\alpha,R_0)$.

Per tant, la conjectura quedarà provada si en mirar la funció de distribució com una funció del paràmetre t, $0\le t\le 1$, la derivada respecte a t és no negativa, és a dir:

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s_1,\dots,s_n,\alpha,R_t)\ge 0.$$

Per confirmar que la derivada no és mai negativa, Royen utilitza les propietats de les lleis gamma multivariants que coneix molt bé, però això dificulta la lectura de l'article a un matemàtic no familiaritzat amb aquestes distribucions. És per aquest motiu que Latala i Matlak [4] tornaren a escriure, de manera més entenedora, la prova en el cas particular $\alpha=\frac{1}{2}$, i fou el seu article el que va donar a conèixer el treball de Royen a la comunitat matemàtica.

Referències

[1] C.W. Dunnet, M. Sobel. *Approximations to the probability integral and certain percentage points to a multivariate analogue of Student's t-distribution.* Biometrika **42** (1955), 258–260.

[2] O.J. Dunn. *Estimation of the means of dependent variables.* Ann. math. Stat. **29** (1958), 1095–1111.

[3] C.G. Khatri. *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds.* Ann. Math. Stat. **38** (1967), 1853–1867.

[4] R. Latala, D. Matlak. *Royen's proof of the gaussian correlation inequality.* Geometric Aspects of Functional Analysis. Israel Seminar (GAFA). Springer, (2017), 265–274.

[5] L. Pitt. *A gaussian correlation inequality for symmetric convex sets.* Ann. Prob., **5(3)** (1977), 470–474.

[6] A.S. Krishnamoorthy, M. Parthasarathy. *A multivariate gamma-type distribution.* Ann. Math. **22** (1951), 549–557.

[7] T. Royen. *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to multivariate gamma distributions.* Far East Journal Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.

[8] G. Schechtman, T. Schlumprecht, J. Zinn. (1967) *On the gaussian measure of the intersection.* Ann. Prob. **28**(1) (1967), 346–357.

[9] Z. Sidak. *Rectangular confidence regions for the means of multivariate normal distributions.* J. Amer. Stat. Assoc. **62** (1967), 626–633.

[10] N. Wolchover. *A long-sought proof found and almost lost.* Quantamagazine (2017). (`https://www.quantamagazine.org/`)

La ciència dels sistemes complexos al Centre de Recerca Matemàtica

Álvaro Corral, Alex Roxin i Tomás Alarcón
Centre de Recerca Matemàtica

Els sistemes complexos

Durant els darrers cent anys, la física ha procedit a expandir les seves fronteres cap al més petit (l'àtom, el nucli, els quarks) i cap al més gran (les galàxies, l'expansió de l'univers...), la qual cosa ha requerit i propiciat important avenços matemàtics.

Podem trobar una altra frontera de la ciència molt més a prop nostre: la dels sistemes complexos. I què són els sistemes complexos? Si fossin fàcils de definir voldria dir que no són complexos; de tota manera, com en altres coses a la vida, podem reconèixer un sistema complex quan el veiem: un fluid turbulent, el clima, l'economia, la política, la cèl·lula, el cervell, els ecosistemes, les ciutats, internet... Pràcticament tots els problemes que afronta la humanitat al segle XXI venen de la nostra limitada capacitat de comprendre els sistemes complexos [16]. A partir d'aquesta enumeració podem constatar que algunes característiques comunes d'aquests sistemes són:

- Primer, que es componen de moltíssimes parts o unitats (al contrari que els sistemes més paradigmàtics de la física, com l'àtom d'hidrogen o el sistema solar).
- Segon, que el comportament del sistema no és caracteritza pel comportament de les seves parts, sinó que hi ha un comportament global emergent, o, com va dir Aristòtil, el tot és més que la suma de les parts (en contraposició al que passa amb altres paradigmes de la física, com un gas ideal o un material paramagnètic). Això vol dir que el procediment reduccionista habitual en física de descompondre el tot en les seves parts i investigar aquestes parts per separat simplement no funciona amb els sistemes complexos.
- Tercer, que són sistemes allunyats de l'equilibri (no com passa, per exemple, amb una de les fites de la física del segle XX, el model d'Ising).

L'hipotètic lector o lectora haurà notat que als nostres exemples hem barrejat sistemes que pertanyen a disciplines diverses: la física, les ciències socials, la biologia... Llavors, la ciència dels sistemes complexos és una part de la física? Potser pel que va dir l'eminent físic Sam Edwards, que física és allò que fan els físics, simplement [3]. Certament, avui dia un gran nombre de físics han començat a estudiar aquesta mena de sistemes, avorrits dels recargolaments infructuosos de les teories de cordes, supercordes, etcètera [5, 11].

Al Centre de Recerca Matemàtica (CRM), de Bellaterra, creiem que la ciència dels sistemes complexos és massa complexa per deixar-la només als físics (i encara més als biòlegs, sociòlegs, etcètera) i que els matemàtics no